ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. α)

$$N = M^2 - 4M + I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 1+3 \\ 2+6 & 2+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3-4+1 & 4-4+0 \\ 8-8+0 & 11-12+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

Α. β)

Η πράξη $B \cdot \Gamma$ ορίζει πίνακα διαστάσεων 1x3

Η πράξη $B \cdot \Delta$ δεν ορίζει πίνακα

Η πράξη $\Delta \cdot B + 3E$ ορίζει πίνακα διαστάσεων 2x4

Η πράξη A^2 δεν ορίζει πίνακα

Η πράξη $A + B$ δεν ορίζει πίνακα

Β. α)

Η ζητούμενη εξίσωση $\quad y - yo = \lambda(x - xo) \Leftrightarrow$

$$y - 1 = -2(x - 0) \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 1$$

Β. β)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{e^x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 2004\right) = 0 - 0 + 2004 = 2004$$

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α . α)

Αν ρ είναι η ακτίνα της βάσης του κώνου και υ το ύψος του, τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι $\lambda^2 = \rho^2 + \upsilon^2 \Leftrightarrow 17^2 = \rho^2 + 15^2$

$$289 = \rho^2 + 225$$

$$\rho^2 = 64$$

$$\rho = 8$$

Α . β)

Θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$

Όμως $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6$ και $f(-3) = \alpha$

Οπότε πρέπει $\alpha = -6$

Β.

Συνάρτηση f	Πρώτη παράγωγος f΄
$\ln x$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$-\frac{1}{x^2}$
ημx	συνx
συνx	−ημx
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α.

$f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4$, $10 \leq x \leq 35$

$f'(x) = -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow x = 20$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow x < 20$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}x + \frac{1}{5} < 0 \Leftrightarrow x > 20$

Επομένως η f παρουσιάζει μέγιστο για x = 20.

Άρα η μέγιστη χωρητικότητα προκύπτει όταν ο άνθρωπος είναι 20 ετών.

Β.

$f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x - 1$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = \mathbb{R}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = \mathbb{R}$

Επομένως η συνάρτηση f + g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$

$= 1 - x^2 + x - 1 =$

$= -x^2 + x$

και παράγωγο $(f+g)'(x) = (-x^2 + x)' = -2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0 \iff 1-x^2 \neq 0 \iff$

$x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα η $\frac{g}{f}$ ορίζεται στο $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$ με τύπο $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{1-x^2} =$

$$= \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{-1}{1+x}$$

και παράγωγο $\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α α)

$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \iff x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 0 \iff$
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(3\ ,4)$ και ακτίνα $\rho = 5$

Α. β)

Για $x = 0$ έχουμε $y^2 - 8y = 0 \iff y(y-8) = 0 \iff y = 0$ ή $y = 8$

Επομένως τα σημεία τομής του κύκλου με τον άξονα των y είναι τα $(0,\ 0)$, $(0,\ 8)$

Β. α)

$$P'(t) = \left[10te^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100\right]' = \left[10te^{\frac{t}{10}}\right]' - \left[100e^{\frac{t}{10}}\right]' + (10100)'$$

$$= (10t)'\ e^{\frac{t}{10}} + 10t\left(e^{\frac{t}{10}}\right)' - 100\left(e^{\frac{t}{10}}\right)' =$$

$$= 10e^{\frac{t}{10}} + 10t\ e^{\frac{t}{10}}\left(\frac{t}{10}\right)' - 100e^{\frac{t}{10}}\left(\frac{t}{10}\right)' =$$

$$= 10e^{\frac{t}{10}} + 10t \cdot e^{\frac{t}{10}} \cdot \frac{1}{10} - 100e^{\frac{t}{10}} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= 10e^{\frac{t}{10}} + t \cdot e^{\frac{t}{10}} - 10e^{\frac{t}{10}} = t \cdot e^{\frac{t}{10}}$$

Β. β)

$P'(10) = 10\ e = 10 \cdot 2{,}7 = 27$